ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЦИКЛОИДЫ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ

К.А. Ергенян[1], Т.В. Мкртчян[2]

[1]Российско-Армянский университет

[2] Ученики школы Российско-Армянского университета "Усмунк"

kamo.erg@gmail.com, ***tik.mkrtchyan877@gmail.com***

АННОТАЦИЯ

В данной работе исследуется кривая циклоида, ее математические свойства, физические характеристики и области применения. Особое внимание уделяется ее роли в задачах брахистохрона и таутокрона. Свойства циклоиды изучались многими учеными, включая Галилео Галилея, Блеза Паскаля, Иоганна Бернулли и Христиана Гюйгенса. Эти исследования показали, что циклоида широко используется не только в теоретической математике, но и в инженерии, механике и физике.

Ключевые слова: циклоида, брахистохрон, таутокрон, параметрические уравнения, механика.

1.Введение

Циклоида — это плоская кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии. Исследование циклоиды началось в XVII веке, когда Галилео Галилей впервые обратил внимание на эту уникальную кривую. Его работы продолжили Блез Паскаль и Иоганн Бернулли, которые изучали применение циклоиды в физике и механике.

2.Основные математические свойства циклоиды

2.1. Параметрические уравнения циклоиды

Если окружность радиуса R катится без скольжения вдоль оси, то точка на окружности описывает циклоиду, которую можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$X = R\,(t - \sin t\,)$$

$$Y = R\,(1 - \cos t\,)$$

где t — угол поворота окружности. Эти уравнения демонстрируют зависимость циклоиды от угла вращения и способ построения этой кривой с помощью движущейся точки.

2.2 Длина и площадь циклоиды

Математические вычисления показывают:

- Длина одной полной дуги циклоиды составляет 8R.
- Площадь, ограниченная одной дугой циклоиды и осью, равна $3\pi R^2$.

Эти результаты имеют важное значение в инженерных приложениях, особенно в проектировании механических систем.

2.3 Применения циклоиды

2.3.1 Циклоида как брахистохрон

В 1696 году Иоганн Бернулли предложил задачу брахистохрона — найти такую кривую, по которой тело достигает конечной точки за минимальное время. Он доказал, что эта кривая — циклоида. Этот результат сыграл важную роль в развитии вариационного исчисления.

2.3.2 Циклоида как таутокрон

Христиан Гюйгенс исследовал поведение маятников в различных системах и доказал, что если маятник движется вдоль циклоиды, то его период колебаний остается неизменным, независимо от начального положения. Это свойство было использовано при создании точных механических часов

3. Инженерные и прикладные применения циклоиды

3.1 В механике и машиностроении

- Зубчатые передачи: циклоидальные зубчатые механизмы обеспечивают плавную передачу энергии в машинах.
- Проектирование мостов и арок: использование циклоидальной формы способствует повышенной устойчивости конструкций.
- Оптические технологии: отражающие поверхности с циклоидальной формой минимизируют потери света.
- Механизмы часов: циклоидальные маятники повышают точность измерений времени.

3.2 Циклоидальные роторы в насосах и компрессорах

- Разработаны новые роторные профили с улучшенной гидродинамикой.
- Проведены численные исследования (CFD-моделирование) для оптимизации потока жидкости.
- Улучшенные роторные профили могут применяться в насосах для водорода, компрессорах и вакуумных системах.

4. Заключение

Циклоида — это уникальная математическая кривая, которая обладает важными свойствами и находит широкое применение в различных областях науки и техники.

- Она является траекторией точки катящегося без скольжения круга.
- Циклоида является брахистохронной кривой, определяющей путь минимального времени спуска.
- Она также является таутокронной кривой, обеспечивающей постоянный период колебаний.
- XVII век ознаменовался значительным прогрессом в изучении циклоиды, что привело к развитию дифференциального и интегрального исчисления.
- Ее применение варьируется от проектирования зубчатых механизмов и мостов до точных маятниковых часов.

Таким образом, циклоида продолжает оставаться важным объектом изучения как в теоретической математике, так и в инженерных приложениях.

Литература

1. Галилео Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук — 1638.

2. Паскаль Б. О природе циклоиды — 1658.
3. Бернулли И. Задача брахистохрона // Acta Eruditorum — 1696.
4. Гюйгенс Х. Маятниковые часы — 1673.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — М.: Наука, 1974.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика — М.: Физматлит, 1965.
7. Кортевег Д. О движении жидкости в циклоидальных каналах // Journal of Fluid Mechanics, 1896.
8. Goldstein H. Classical Mechanics — Addison-Wesley, 1980.

PHYSICAL ASPECTS OF THE CYCLOID AND ITS APPLICATION IN MECHANICS

K.A. Yergenyan[1], T.V. Mkrtchyan[2]

[1] Russian-Armenian University

[2] Students of the school of the Russian-Armenian University "Usmunk"

kamo.erg@gmail.com, tik.mkrtchyan877@gmail.com

ABSTRACT

This paper examines the cycloid curve, its mathematical properties, physical characteristics, and applications. Special attention is given to its role in the brachistochrone and tautochrone problems. The properties of the cycloid have been studied by many scientists, including Galileo Galilei, Blaise Pascal, Johann Bernoulli, and Christiaan Huygens. These studies have demonstrated that the cycloid is widely used not only in theoretical mathematics but also in engineering, mechanics, and physics.

Keywords: cycloid, brachistochrone, tautochrone, parametric equations, mechanics.

1.Introduction

A cycloid is a plane curve described by a point on the circumference of a rolling circle that moves without slipping along a straight line. The study of the cycloid began in the 17th century when Galileo Galilei first examined this unique curve. His work was continued by Blaise Pascal and Johann Bernoulli, who explored its applications in physics and mechanics.

2. Fundamental Mathematical Properties of the Cycloid

2.1. Parametric Equations of the Cycloid

If a circle with radius R rolls without slipping along an axis, a point on the circle describes a cycloid, which can be expressed by the following parametric equations:

$X = R\,(t - \sin t)$

$Y = R\,(1 - \cos t\,)$

where t is the angle of rotation of the circle. These equations illustrate how the cycloid depends on the rotation angle and how it is traced by a moving point.

2.2 Length and Area of the Cycloid

Mathematical calculations show that:

- The length of one complete arc of a cycloid is 8R.
- The area enclosed by one arc of the cycloid and the axis is $3\pi R^2$.

These results are significant in engineering applications, especially in mechanical system design.

2.3 Applications of the Cycloid

2.3.1 The Cycloid as a Brachistochrone

In 1696, Johann Bernoulli proposed the brachistochrone problem—finding the curve along which a body reaches its final point in the shortest possible time. He proved that this curve is the cycloid. This discovery played a crucial role in the development of the calculus of variations.

2.3.2 The Cycloid as a Tautochrone

Christiaan Huygens studied the behavior of pendulums in various systems and demonstrated that if a pendulum moves along a cycloidal path, its oscillation period remains constant regardless of the initial position. This property was used in the design of highly accurate mechanical clocks.

3. Engineering and Applied Applications of the Cycloid

3.1 In Mechanics and Mechanical Engineering

- Gear Systems: Cycloidal gear mechanisms ensure smooth and efficient power transmission in machines.
- Bridge and Arch Design: The use of cycloidal shapes enhances structural stability.
- Optical Technologies: Reflecting surfaces with cycloidal forms minimize light losses.
- Clock Mechanisms: Cycloidal pendulums improve timekeeping accuracy.

3.2 Cycloidal Rotors in Pumps and Compressors

- **New rotor profiles have been developed with improved hydrodynamics.**
- **Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations have been conducted to optimize fluid flow.**
- **Enhanced rotor profiles can be applied in hydrogen circulation pumps, compressors, and vacuum systems.**

4. Conclusion

The cycloid is a unique mathematical curve that possesses significant properties and finds widespread application in various scientific and technical fields.

- It represents the trajectory of a point on a rolling circle.
- The cycloid is the brachistochrone curve, determining the path of shortest descent time.

- It is also the tautochrone curve, ensuring a constant oscillation period.
- The 17th century saw significant progress in the study of the cycloid, leading to the development of differential and integral calculus.
- Its applications range from gear mechanisms and bridges to precise pendulum clocks.

Thus, the cycloid continues to be an essential subject of study in both theoretical mathematics and engineering applications.

References

1. Galilei, G. Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences — 1638.
2. Pascal, B. On the Nature of the Cycloid — 1658.
3. Bernoulli, J. The Brachistochrone Problem // Acta Eruditorum — 1696.
4. Huygens, C. Pendulum Clocks — 1673.
5. Arnold, V. I. Mathematical Methods of Classical Mechanics — Moscow: Nauka, 1974.
6. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. Mechanics — Moscow: Fizmatlit, 1965.
7. Korteweg, D. On Fluid Motion in Cycloidal Channels // Journal of Fluid Mechanics, 1896.
8. Goldstein, H. Classical Mechanics — Addison-Wesley, 1980.

ՑԻԿԼՈԻԴԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԱՍՊԵԿՏՆԵՐԸ և ԴՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅՈՒՄ

Կ.Ա. Երգենյան[1], Տ.Վ. Մկրտչյան[2]

[1] Հայ-Ռուսական համալսարան

[2] Հայ-ռուսական համալսարանի "Ուսմունք"դպրոցի աշակերտներ

kamo.erg@gmail.com, tik.mkrtchyan877@gmail.com

Անոտացիա

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է ցիկլոիդ կորը, դրա մաթեմատիկական հատկությունները, ֆիզիկական բնութագրերը և կիրառությունները: Հատուկ ուշադրություն է դարձվում դրա դերին բրահիստոքրոնի և տաուտոքրոնի խնդիրներում: Ցիկլոիդի հատկությունները ուսումնասիրվել են բազմաթիվ գիտնականների կողմից, ներառյալ Գալիլեո Գալիլեյը, Բլեզ Պասկալը, Յոհան Բեռնուլլին և Քրիստիան Հյույգենսը: Այս հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ցիկլոիդն ունի լայն կիրառություն ոչ միայն տեսական մաթեմատիկայում, այլև ինժեներական, մեխանիկական և ֆիզիկական ոլորտներում:

Հիմնական բառեր՝ ցիկլոիդ, բրահիստոքրոն, տաուտոքրոն, պարամետրական հավասարումներ, մեխանիկա:

1. Ներածություն

Ցիկլոիդը հարթ կոր է, որը նկարագրվում է շրջանի մի կետով, երբ այն առանց սահելու գլորվում է ուղիղ գծի երկայնքով: Ցիկլոիդի ուսումնասիրությունը սկսվել է XVII դարում, երբ Գալիլեո Գալիլեյը առաջին անգամ անդրադարձել է այս յուրահատուկ կորը: Նրա աշխատանքները շարունակեցին Բլեզ Պասկալը և Յոհան Բեռնուլլին, ովքեր ուսումնասիրեցին ցիկլոիդի կիրառումը ֆիզիկայում և մեխանիկայում:

2. Ցիկլոիդի հիմնական մաթեմատիկական հատկությունները

2.1.Ցիկլոիդի պարամետրական հավասարումները

Եթե շառավղով R շրջանագիծը առանց սահելու գլորվում է առանցքի երկայնքով, ապա դրա մի կետ նկարագրում է ցիկլոիդ, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ պարամետրական հավասարումներով՝

$X = R\ (t - \sin t\ )$

$Y = R\ (1 - \cos t\ )$

որտեղ t-ն շրջանագծի պտույտի անկյունն է: Այս հավասարումները ցույց են տալիս, թե ինչպես է ցիկլոիդը կախված պտույտի անկյունից և ինչպես է այն գծագրվում շարժվող կետի միջոցով:

2.2 Ցիկլոիդի երկարությունը և մակերեսը

Մաթեմատիկական հաշվարկներով հնարավոր է ցույց տալ, որ՝

- Ցիկլոիդի մեկ ամբողջական տատանումից առաջացող կորի երկարությունը հավասար է 8R:
- Ցիկլոիդի տակ գտնվող մակերեսը՝ $3\pi R^2$:

Այս արդյունքները կարևոր նշանակություն ունեն ինժեներական կիրառություններում, հատկապես մեխանիկական համակարգերի նախագծման մեջ:

2.3 Ցիկլոիդի կիրառությունները

2.3.1 Ցիկլոիդը որպես բրահիստոքրոն

1696 թվականին Յոհան Բեռնուլլին առաջարկեց բրահիստոքրոնի խնդիրը՝ գտնել այնպիսի կոր, որի երկայնքով մարմինը ամենաարագ ձևով կհասնի վերջնական կետին: Նա ապացուցեց, որ այդ կորն է հենց ցիկլոիդը: Այս բացահայտումը կարևոր դեր խաղաց վարիացիոն հաշվարկի զարգացման մեջ:

2.3.2 Ցիկլոիդը որպես տաուտոքրոն

Քրիստիան Հյույգենսը ուսումնասիրեց, թե ինչպես կարելի է ցիկլոիդը կիրառել ճոճանակային համակարգերում: Նրա հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ եթե ճոճանակը շարժվում է ցիկլոիդալ ուղու երկայնքով, ապա դրա տատանումների պարբերությունը մնում է անփոփոխ՝ անկախ սկզբնական դիրքից: Այս հատկությունն օգտագործվել է բարձր ճշգրտության մեխանիկական ժամացույցների կառուցման համար:

3. Ցիկլոիդի ինժեներական և կիրառական կիրառությունները

3.1 Մեխանիկայի և մեքենաշինության մեջ

- Ատամնանիվային մեխանիզմներ՝ ցիկլոիդալ ատամնանիվները ապահովում են սահուն և արդյունավետ էներգիայի փոխանցում:
- Կամուրջների և կամարների կառուցում՝ ցիկլոիդային ձևերի կիրառումը նպաստում է կառուցվածքների կայունության բարձրացմանը:

- Օպտիկական տեխնոլոգիաներ՝ ցիկլոիդային մակերեսները նվազեցնում են լուսային կորուստները:
- Ժամացույցների մեխանիզմներ՝ ցիկլոիդալ ճոճանակները մեծացնում են ժամացույցների ճշգրտությունը:

3.2 Ցիկլոիդային ռոտորներ պոմպերում և կոմպրեսորներում

- Մշակվել են նոր ռոտորային պրոֆիլներ՝ բարելավված հոսքային բնութագրերով:
- Կատարվել են թվային վերլուծություններ (CFD մոդելավորում)՝ հեղուկի հոսքի օպտիմալացման համար:
- Բարելավված ռոտորային պրոֆիլները կարող են կիրառվել ջրածնի շրջանառության պոմպերում, կոմպրեսորներում և վակուումային համակարգերում:
-

4. Եզրակացություն

Ցիկլոիդը եզակի մաթեմատիկական կոր է, որն ունի կարևոր հատկություններ և լայնորեն կիրառվում է տարբեր գիտական և տեխնիկական ոլորտներում:

- Այն ներկայացնում է գլորող շրջանի եզրի հետագիծը:
- Ցիկլոիդը հանդիսանում է բրախիստոքրոնային կոր՝ սահմանելով նվազագույն ժամանակի իջման ուղին:
- Այն նաև տաուտոքրոնային կոր է, որը ապահովում է հաստատուն տատանման պարբերություն:
- XVII դարում ցիկլոիդի ուսումնասիրությունը խթանեց դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվարկի զարգացումը:
- Դրա կիրառությունները ընդգրկում են ատամնանիվային մեխանիզմները, կամուրջները, ճշգրիտ ճոճանակային համակարգերը և շատ այլ ոլորտներ:

Այսպիսով, ցիկլոիդը շարունակում է մնալ թե՛ տեսական մաթեմատիկայի, թե՛ ինժեներական կիրառությունների կարևոր ուսումնասիրության առարկա

Գրականություն

1. Գալիլեյո Գ. Երկու նոր գիտությունների մասին զրույցներ և մաթեմատիկական ապացույցներ — 1638:
2. Պասկալ Բ. Ցիկլոիդի բնույթի մասին — 1658:
3. Բեռնուլլի Յ. Բրախիստոքրոնի խնդիր // Acta Eruditorum — 1696:
4. Հյույգենս Ք. Ճոճանակային ժամացույցներ — 1673:
5. Առնոլդ Վ. Ի. Դասական մեխանիկայի մաթեմատիկական մեթոդները — Մոսկվա: Գիտություն, 1974:
6. Լանդաու Լ. Դ., Լիֆշից Ե. Մ. Մեխանիկա — Մոսկվա: Ֆիզմատլիտ, 1965:
7. Կորտևեգ Դ. Հեղուկի շարժումը ցիկլոիդային ջրանցքներում // Journal of Fluid Mechanics, 1896:
8. Գոլդշտեյն Հ. Դասական մեխանիկա-Ադիսոն-Ուեսլի, 1980: